Une explication de la formule d'Euler ($e^{i\pi} = -1$)

Philippe BAUCOUR

15 avril 2016

1 Introduction

Dans un autre article on avait montré que :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

C'était déjà très bien mais là, on va passer un peu de temps afin d'expliquer, mais surtout afin de comprendre, LA formule d'Euler. Pour rappel, cette dernière s'écrit sous la forme :

$$e^{i\pi} = -1$$

Le besoin d'explications provient du fait que c'est quand même un peu bizarre cette histoire. En effet, à gauche de l'égalité on retrouve une exponentielle (dont on sait que c'est un nombre irrationnel) qui est à la puissance π (qui, lui aussi, est irrationnel). De plus, afin de compliquer les choses, il y a ce i qui fait aussi partie de l'exposant. Normalement quand je vois 2^3 je sais à peu près de quoi je parle. C'est $2 \cdot 2 \cdot 2$. Mais là, élever un nombre à la puissance $i\pi$ c'est à dire à une puissance "complexe"... Ça vient d'où, ça signifie quoi exactement ? Bref, ça n'a pas l'air simple tout ça. En plus, ce qui est certainement le plus choquant c'est qu'au final, de l'autre côté de l'égalité on retrouve -1 qui est là, les mains dans les poches, en train de nous attendre. C'est un peu magique, non ? En tout cas ça demande des explications.

Allez c'est parti... Heu, on démarre d'où au fait ? Faisons simple et utilisons notre résultat précédent à savoir l'expression de e sous forme de limite.

2 Comment évaluer e^x ?

On a dit :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Mais nous, ce que l'on veut, c'est un truc de la forme $e^{i\pi}$. C'est à dire, si on oublie la puissance complexe pour un moment, un truc du style e^x. Bon, et bien allez, ré-écrivons la définition précédente sous la forme :

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Pour l'instant ça doit aller. On a juste inversé l'ordre autour de l'égalité et j'ai remplacé le x par un n (en fait je vais avoir besoin du x dans deux secondes). Attention, j'ai mis n au lieu de x mais cela ne veut pas dire que je me restreins à des valeurs entières. J'ai mis n par habitude. Cette quantité pourrait être entière, réelle etc.

Ceci posé il vient :

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}$$

Mouai... Y a pas de piège ou de choses compliquées (on élève à gauche et à droite à la puissance x) mais bon, c'est pas très sexy. Ok, quid de cette écriture :

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1x}{nx}\right)^{nx}$$

J'ai le droit. On multiplie en haut et en bas par la même quantité donc on ne change rien... En fait l'expression de e^x est devenue :

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{nx}\right)^{nx}$$

Et ça c'est cool. En effet, si pose $m = nx$ on peut même écrire :

$$e^x = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

Attends, attends... Tu as le droit de faire ça ? Oui bien sûr ! On cherche à évaluer e^x, mettons e^3. Et on dit que :

$$e^3 = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{3n}\right)^{3n}$$

Et qu'est-ce qui va se passer quand on va faire tendre n vers l'infini (et au delà) ? On va avoir un dénominateur et une puissance qui vont valoir : $1 \cdot 3$, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 3$... $n \cdot 3$. Ce que je peux encore écrire sous la forme : 3, 6, 9 ... m. En fait, comme x est multiplié par n (une variable qui tend vers l'infini) on peut se permettre de regrouper le produit des deux variables dans une seule variable m qui, elle aussi, tend vers l'infini. Au final on a donc :

$$e^3 = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{m}\right)^m$$

Maintenant, si on revient au cas général (e^x) et si on remplace m par n (c'est purement cosmétique) on obtient :

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Bon, et bien on avance. Doucement, mais on avance... À ce stade, pour évaluer $e^{i\pi}$ nous devons partir de :

$$e^{i\pi} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n$$

Mouai... Pour le coup, ça fait pas rêver... Essayons l'écriture suivante :

$$e^{i\pi} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + i\frac{\pi}{n}\right)^n$$

Vous, je sais pas, mais moi quand je vois ça, cela me fait penser à :

$$e^{i\pi} = \lim_{n \to +\infty} (a + ib)^n$$

En Français dans le texte cela signifie : déterminer $e^{i\pi}$ cela revient à être capable d'évaluer la puissance d'un nombre complexe, c'est à dire à comprendre ce qu'est la multiplication d'un nombre complexe par lui même et plus simplement encore, à comprendre ce qu'est la multiplication de deux nombres complexes. Bon ben y pas... Faut y aller...

3 Multiplication de 2 nombres complexes

Là, c'est "Retour en classe de Terminale"... Non, je ne me moque pas, mais moi, "nombres complexes", ça me fait penser à la "Terminale". Bon, je ne reviens pas sur ce qu'est un nombre complexe ($a+ib$, etc.), la représentation dans le plan complexe et les deux ou trois trucs qu'on voit au début du chapitre "Les nombres Complexes" quand on est en term'. Ceci dit, on va revenir sur cette histoire de multiplication de nombres complexes. En effet, au delà d'une simple règle algébrique, il y a des choses plus profondes qu'on loupe généralement soit parce que cela va trop vite en cours soit parce qu'on a jamais eu le temps de les voir expliquées différemment.

Pour rappel, la multiplication de 2 nombres complexes se fait de la façon suivante :

$$\begin{aligned}(1.5 + 1i) \cdot (0.5 + 2.5i) &= 1.5 \cdot 0.5 + 1.5 \cdot 2.5i + 1i \cdot 0.5 + 1i \cdot 2.5i \\ &= 0.75 + 3.75i + 0.5i + 2.5i^2 \\ &= 0.75 + 4.25i - 2.5 \\ &= -1.75 + 4.25i\end{aligned}$$

Note : la raison pour laquelle j'utilise des coefficients du type 1.5 c'est tout simplement parce que je souhaite avoir des schémas pas trop moches dans la suite de l'article.

Mouai... Généralement, quand on explique ça pour la première fois, j'ai encore jamais vu quelqu'un lever les bras au ciel et s'écrier "Nom de Zeus ! Ayé j'ai vu la lumière". Bref, au mieux, on a confirmé qu'on savait faire des additions et des multiplications, au pire on est passé à côté d'un truc. De plus, si on va faire un tour dans le plan complexe, c'est pas mieux. En effet, si on se donne un point A d'affixe $1.5 + 1i$ et un point B d'affixe $0.5 + 2.5i$ le résultat de leur multiplication est un point C d'affixe $-1.75 + 4.25i$ qui s'affichent ainsi dans le plan complexe :

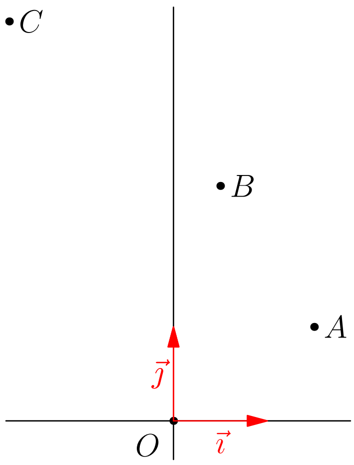

FIGURE 1 – Multiplication, sans explication, de deux nombres complexes

Note : Sur le plan, le $\vec{i}$ qui apparaît, c'est le vecteur $\vec{i}$ du repère orthonormé. Rien à voir avec le nombre imaginaire i.

Ne faites pas cette tête là, je sens bien que cela ne soulève pas l'enthousiasme et qu'on ne va pas aller ensemble au stade de France voir un spectacle de multiplication de nombre complexes sur écran géant. Bref... À mon avis, si on ne "voit" rien du côté algébrique ni du côté du plan complexe cela veut dire qu'on passe à côté d'un truc. Je vous propose donc d'oublier tout ce que vous savez sur la multiplication des nombres complexes et de repartir de zéro. On va prendre notre temps et décomposer les choses. Pour débuter, voilà ce qui se passe quand on multiplie un nombre complexe par un nombre réel :

$$(1.5 + 1i) * 4 = 6 + 4i$$

Rien de très excitant mais bon on en est au tout début alors pas la peine de râler. . En fait, il faut remarquer qu'à l'instar de ce qui se passe dans la multiplication entre nombre réels, on opère une mise à l'échelle. Pas clair ? Même pas peur ! Cette histoire de mise à l'échelle est peut être plus parlante lorsqu'on regarde ce qui se passe dans le plan complexe.

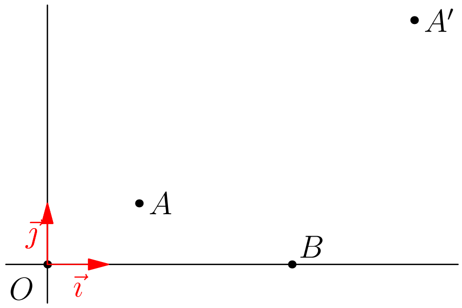

Figure 2 – Multiplication d'un complexe par un réel

On retrouve B le facteur multiplicatif qui vaut 4. Comme c'est un nombre réel, on le retrouve sur l'axe des... réels. Ensuite on reconnait le point A d'affixe $1.5+1i$ et le nombre complexe (ou le point du plan complexe, comme on veut) A' qui est le résultat de la multiplication des deux protagonistes précédents. Avec seulement des points dans le plan on devine peut être mais on ne voit pas encore très bien la mise à l'échelle qui s'opère. Ce sera sans doute plus clair avec des triangles :

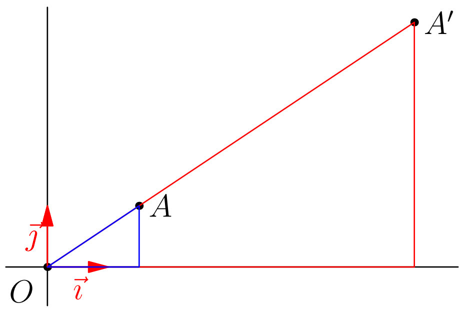

Figure 3 – Multiplication d'un nombre complexe par un nombre réel

En fait, on construit les triangles bleu et rouge à partir des points A et A'. On voit bien que les triangles sont semblables (dans les mêmes proportions) et que tout se passe comme si, en O, on avait "soufflé" dans le triangle bleu pour le faire grossir et qu'il devienne aussi gros que le triangle rouge. Oui je sais, c'est un peu poussé comme image, mais bon, on réalise que les proportions sont bien conservées et que les deux triangles sont semblables.

A retenir : multiplication d'un complexe par un réel = mise à l'échelle.

Allez, on passe à la suite. On va maintenant multiplier un complexe par un imaginaire pur. Pour faire encore plus simple, on va multiplier un nombre complexe par i. Comme tout à l'heure on commence par l'expression algébrique de la chose :

$$\begin{aligned}(1.5 + 1i)i &= 1.5i - 1 \\ &= -1 + 1.5i\end{aligned}$$

Heu... Pas cool, on arrive pas à bien retrouver ses petits. Regardons ce qui se passe dans le plan complexe.

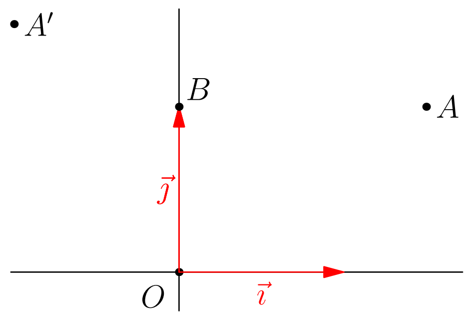

FIGURE 4 – Multiplication d'un nombre complexe par i

Pas mieux... Là aussi, comme ça, à sec, c'est pas évident de voir ce qui se passe. Envoyons un signe dans le ciel nuageux de Gotham City et appelons... Les triangles à la rescousse. Voilà alors ce que l'on peut observer :

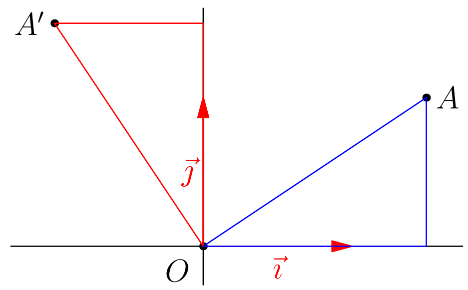

FIGURE 5 – Multiplication d'un nombre complexe par i (triangles)

Là, vous avez le droit de dire "Ahaa !" ou alors, "Oh la belle rouge". J'espère que c'est clair pour tout le monde : la multiplication par i opère une rotation de $+\pi/2$ sur tout ce qu'il touche.

Et maintenant on peut se demander ce qui se passe quand on multiplie un nombre complexe par le nombre imaginaire $2.5i$. Là, y a pas de surprise ni du point de vue algébrique ni dans le plan complexe :

$$\begin{aligned}(1.5+1i)*2.5i &= 3.75i-2.5\\ &= -2.5+3.75i\end{aligned}$$

Ce qui se traduit dans le plan complexe par :

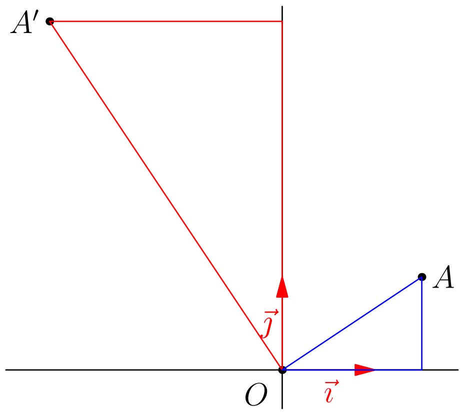

FIGURE 6 – Multiplication d'un nombre complexe par $2.5i$

A retenir : multiplication d'un complexe par un imaginaire pur = mise à l'échelle puis rotation de $\pi/2$.

Bon et bien il est temps de monter sur le plongeoir car normalement on est prêt à comprendre vraiment ce qui se passe lors de la multiplication de deux nombres complexes. Allez, on reprend tout depuis le départ et du point de vu algébrique voilà comment on peut dorénavant décomposer les choses :

$$\begin{aligned}(1.5+1i)\cdot(0.5+2.5i) &= (1.5+1i)\cdot 0.5+(1.5+1i)\cdot 2.5i\\ &= (0.75+0.5i)+(3.75i-2.5)\\ &= (0.75+0.5i)+(-2.5+3.75i)\\ &= -1.75+4.25i\end{aligned}$$

Revoyons l'action au ralenti :

1. Dans la première ligne on distribue le second opérande sur le premier. On aurait pu faire le contraire mais cela permet de d'utiliser les valeurs que nous avons manipulé précédemment.

2. Sur la seconde ligne on effectue la multiplication du premier opérande par $1/2$ (mise à l'échelle par un réel) puis la multiplication par $2.5i$ (rotation de $pi/2$ puis mise à l'échelle d'un facteur 2.5).
3. Sur la troisième ligne je range mes jouets
4. Sur la quatrième ligne on fait la somme des parties réelles et imaginaires et, oh miracle, on retrouve bien les résultats précédents.

Dans le plan complexe les opérations peuvent se décomposer de la façon suivante :

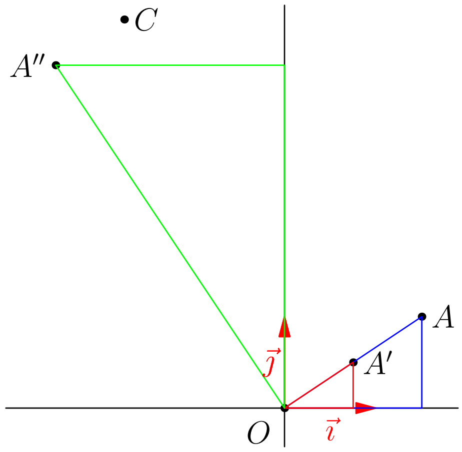

FIGURE 7 – Multiplication de $(1.5 + 1i)$ (point A et triangle bleu) par 0.5 (ce qui donne le point A' et triangle rouge) puis par $2.5i$ (ce qui donne le point A'' et le triangle vert)

Le point A est le point de coordonnées $(1.5 + 1i)$ qui est multiplié par le point $(0.5 + 2.5i)$ qui n'est pas sur le plan pour l'instant. En effet, à ce stade il est important de focaliser son attention sur le fait que dans un premier temps, suite à la multiplication par 0.5 on a un premier point A'. Le triangle issu de A "dégonfle" et toutes ses dimensions sont réduites de moitié. Le point A se transforme en point A'.

Il faut ensuite comprendre que dans un second temps, le point A'' résulte de la multiplication de A par $2.5i$ (rotation de $\pi/2$ puis mise à l'échelle 2.5). Le point A se transforme donc en A''. Enfin, le résultat des courses (le point C sur le plan) résulte de l'addition du point A' et du point A''. On peut pour cela, au bout du vecteur $\overrightarrow{OA''}$ ajouter le vecteur $\overrightarrow{OA'}$. On tombe bien sur le point C.

Bien sûr dans la vraie vie personne ne fait cela. Ceci dit, décomposer l'opération au moins une fois ne fait pas de mal.

Y aurait-t-il une autre façon de voir les choses ? En effet, cette façon de procéder dans le plan complexe, même si elle décompose bien ce qui se passe, n'est pas très pratique.

Pour cela commençons par écrire les nombres complexes sous forme trigonométrique. Si on a $z = a + ib$ on peut toujours écrire ce dernier sous la forme $z = \rho(cos\theta + isin\theta)$ avec ρ qui est le module de z et qui vaut $\sqrt{a^2 + b^2}$ et θ qui est l'argument de z c'est à dire l'angle tel que $tan\theta = \frac{b}{a}$.

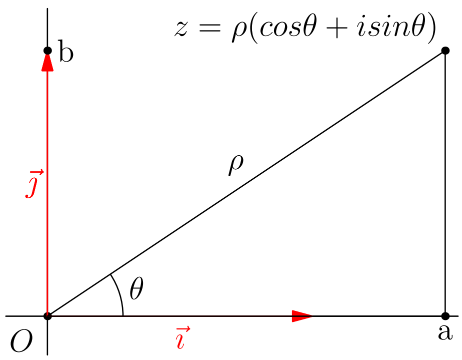

Figure 8 – Notation trigonométrique

Avec cette façon de voir les affixes des nombres complexes voilà ce qui arrive lorsqu'on multiplie $z = \rho(cos\theta + isin\theta)$ par $z' = \rho'(cos\theta' + isin\theta')$

$$\begin{aligned}
zz' &= \rho(cos\theta + isin\theta) \cdot \rho'(cos\theta' + isin\theta') \\
&= \rho\rho'(cos\theta + isin\theta)(cos\theta' + isin\theta') \\
&= \rho\rho'(cos\theta cos\theta' - sin\theta sin\theta' + i(cos\theta sin\theta + sin\theta cos\theta')) \\
&= \rho\rho'(cos(\theta + \theta') + isin(\theta + \theta'))
\end{aligned}$$

A retenir : Le module de la multiplication c'est la multiplication des modules ($\rho\rho'$). L'argument de la multiplication c'est la somme des arguments($\theta + \theta'$).

Quand on passe dans le plan complexe (figure 9), forcément le point C qui est le résultat de la multiplication de A $(1.5 + 1i)$ par B $(0.5 + 2.5i)$ reste à sa place. Par contre, on fait apparaître que l'angle (l'argument) du résultat est bien la somme des arguments de A et de B.

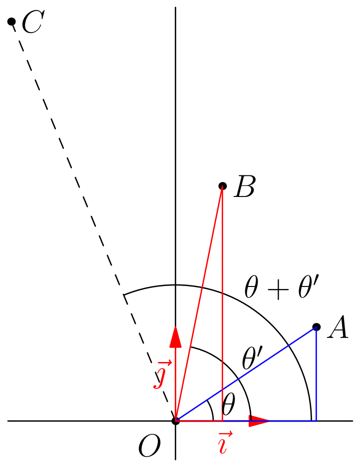

Figure 9 – Multiplication des modules et addition des arguments

Mouai... Pour tout dire je m'attendais à mieux. En fait, c'est brouillon, il y a des angles partout, je suis perdu et je ne vois pas graphiquement ce que signifie une multiplication de nombre complexes. Bref, pas top... Pas de panique, on va faire beaucoup mieux ! Là le seul truc qu'il fallait garder en tête c'est que l'argument de la multiplication c'est la somme des arguments. Pour faire beaucoup mieux, on va se rappeler que "le module du produit c'est le produit des modules". Avec ce mantra en tête et nos notations, on peut écrire :

$$|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|$$

Maintenant, sur la figure 10) introduisons le point D de coordonnées $(1, 0)$. Son module vaut 1 et nous pouvons donc écrire :

$$|\overrightarrow{OC}| \cdot |\overrightarrow{OD}| = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|$$

On multiplie OC par 1, ça ne mange pas de pain. Oui, sauf que maintenant on peut écrire :

$$\frac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OB}|} = \frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OD}|}$$

En d'autres termes, cela signifie que les triangles OBC et ODA sont semblables (ils ont les mêmes proportions) et ça c'est une super bonne nouvelle. Regardons ce qui se passe dans le plan si on fait apparaître le point D et les triangles ODA et OBC.

Normalement il ne faut pas sortir de Saint-Cyr pour remarquer que le triangle OBC est une version survitaminée de ODA qui a subit en plus une rotation. Mais au fait, elle est de combien cette rotation ?

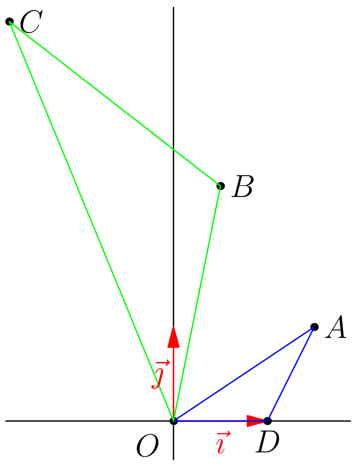

FIGURE 10 – ODA et OBC sont des triangles semblables

Bon, et bien là on va se rappeler que "l'argument de la multiplication c'est la somme des arguments" et on écrit la relation angulaire suivante :

$$(0x, \overrightarrow{OC}) = (0x, \overrightarrow{OA}) + (0x, \overrightarrow{OB})$$

Autrement dit, pour amener le vecteur $\vec{OA}$ sur le vecteur $\vec{OC}$ et le vecteur $\vec{OD}$ sur le vecteur $\vec{OB}$ il suffit de faire subir au triangle ODA une rotation égale à l'angle du vecteur $\vec{OB}$. À ce stade, il faut peut être regarder la figure 11 et revenir lire cette phrase (répétez l'opération autant de fois que nécessaire !).

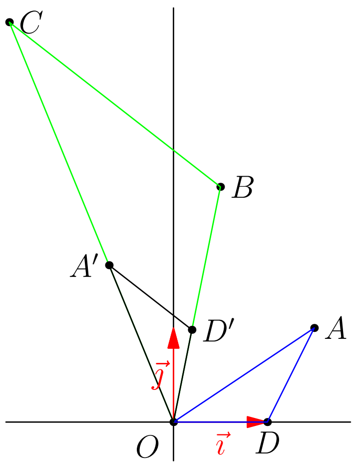

FIGURE 11 – Construction de C

C'est bon, c'est vu le coup de la rotation du triangle ODA ? Pour finir, afin de réaliser graphiquement la multiplication de A par B, une fois que le triangle ODA a fait sa rotation et qu'il est bien en place, il suffit de "souffler" dedans pour le faire grossir jusqu'à ce que le point D' vienne sur le point B. Quand c'est le cas, on est sûr que le point A' est à la place du point C et notre multiplication graphique est terminée.

A retenir : Pour multiplier graphiquement deux nombres complexes

1. On place les 2 points à multiplier sur le plan (A et B dans notre exemple)
2. On place le point D en $(1, 0)$
3. On construit un triangle avec O, D et un des deux points (A dans notre exemple)
4. On fait subir une rotation à ce triangle afin d'amener OD sur l'axe qui relie O au second opérande (axe OB dans notre exemple)
5. On dilate/compresse alors le triangle de telle sorte que D vienne sur B
6. A est alors au point qui représente la multiplication des deux opérandes

4 Puissance d'un nombre complexe

Ne perdons pas le fil. Notre objectif est de comprendre l'expression suivante :

$$e^{i\pi} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + i\frac{\pi}{n}\right)^n$$

Dans un premier temps nous avons décortiqué graphiquement la multiplication des nombres complexes et on a dorénavant une "recette de cuisine" que l'on peut utiliser. Ok, très bien, appliquons donc cette recette à la multiplication d'un nombre par lui même. Pour cela nous avons expliqué que nous devions comprendre ce qu'était la puissance d'un nombre complexe et donc la multiplication des nombres complexes. On vient d'étudier cette dernière. Nous sommes donc capables de nous attaquer à l'étude graphique des puissances des nombres complexes.

Afin de ne perdre personne en route, on va continuer avec les nombres que l'on a déjà utiliser et on va commencer par multiplier A par lui même. Le point résultat sera nommé C comme avant.

Si on applique notre recette, on commence par tracer le triangle ODA puis on fait pivoter ce dernier autour de O afin de mettre OD' sur OA (voir la figure 12). Enfin on fait grossir le triangle $OD'A'$ jusqu'à ce que D' soit en A. Le point A' est alors en $C = A^2$.

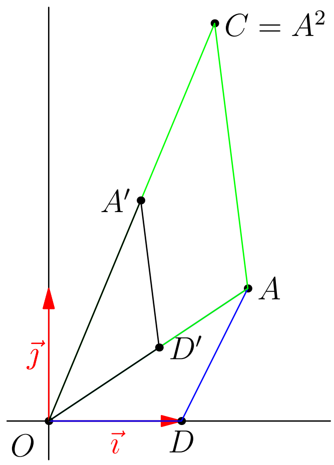

FIGURE 12 – Représentation graphique de A^2

Appliquons la méthode pour tracer A^3 et A^4.

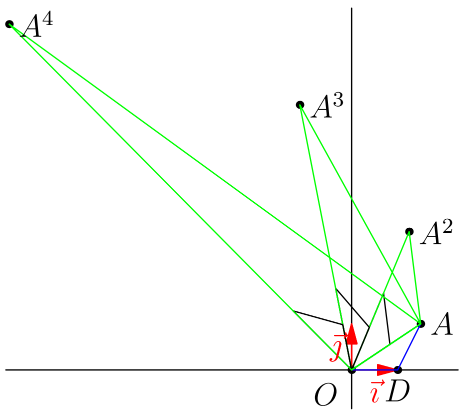

FIGURE 13 – Représentation graphique de A^2, A^3 et A^4 où le module de A est plus grand que 1

Sur la figure 13 on voit que le point A^4 à tendance à partir de plus en plus loin du O. C'est normal car "le module de la multiplication c'est la multiplication des modules" et si le module de départ est supérieur à 1 le module de la puissance de A va croitre de manière "exponentielle".

Regardons ce qui se passe maintenant si le module de A est inférieur à 1. Pour s'y retrouver graphiquement on va faire simple et regarder le cas de A^2 (figure 14)

Pas de panique, c'est la même recette et le même type de dessin. Ce qui change par contre, c'est qu'après rotation du triangle ODA en $OD'A'$, il faut toujours ramener D' sur le point A mais ce coup-ci il faut "dégonfler"

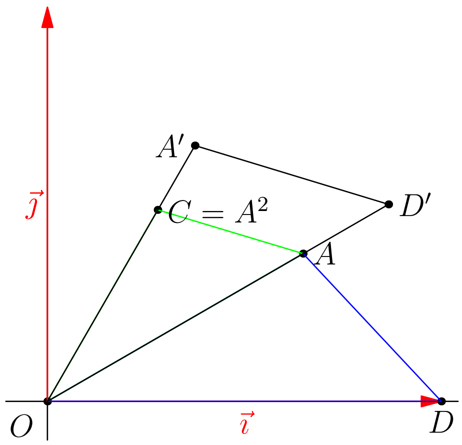

FIGURE 14 – Représentation graphique de A^2 quand le module de A est inférieur à 1

le triangle.

Voici maintenant le calcul juqu'à A^4 (figure 15)

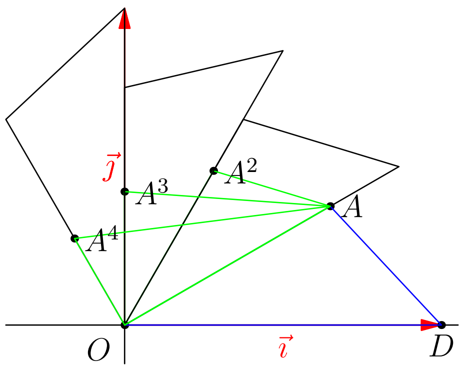

FIGURE 15 – Représentation graphique de A^2, A^3 et A^4 où le module de A est plus petit que 1

Pour le coup, on a toujours le même phénomène d'enroulement mais cette fois le module de A^i décroit de manière exponentielle avec i. Par exemple, en module, on voit bien que A^4 est beaucoup plus proche de 0 que ne peut l'être A^2 par exemple. On a donc visualisé deux cas extrêmes où A^i s'enfuit quand son module est supérieur à 1 et où il s'effondre sur O quand son module est inférieur à 1.

Bien sûr, la question à 1 million de \$ c'est "Ô capitaine ! mon capitaine ! Mais que se passe-t-il donc quand le module de A vaut 1 ?".

5 Puissance d'un nombre complexe de module 1

Là, avant de regarder la figure 16 on peut quand même essayer de réfléchir. En effet, si le module vaut 1 cela veut dire que A^2 aura aussi un module de 1. Même si on continue à tourner autour de O on restera sur le cercle trigonométrique.

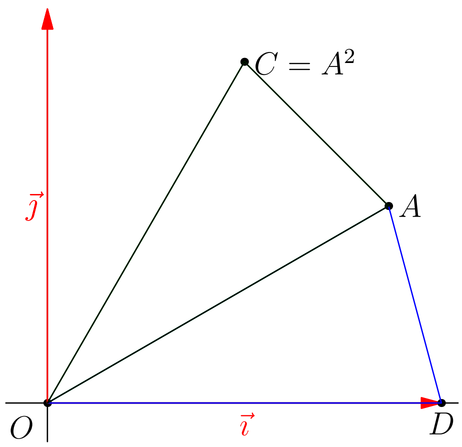

FIGURE 16 – Représentation graphique de A^2 quand le module de A vaut 1

Bravo ! C'est tout bon, c'est exactement ce qui se passe. C'est encore plus visible quand on compose graphiquement les puissances successives d'un nombre complexe dont le module vaut 1. Voir la figure 17 :

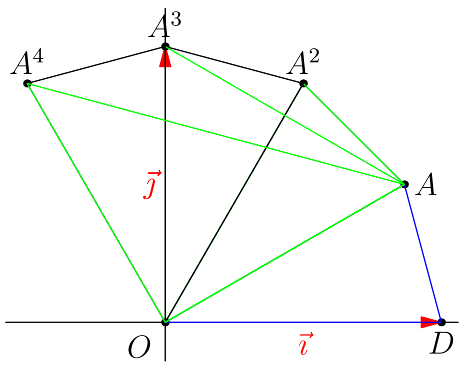

FIGURE 17 – Représentation graphique de A^2, A^3 et A^4 quand le module de A vaut 1

6 Application à la construction de $e^{i\pi}$

On a appris beaucoup de choses, ceci dit, encore une fois, ne perdons pas le fil. Notre objectif est toujours de comprendre graphiquement l'expression suivante :

$$e^{i\pi} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + i\frac{\pi}{n}\right)^n$$

Remarquons que si n tend vers l'infini, l'intérieur de la parenthèse est un nombre complexe qui tend vers le nombre $(1, 0)$ mais sans jamais l'atteindre. En effet, on a un nombre de la forme $(1 + i\frac{\pi}{n})$. C'est un nombre dont le module est légèrement supérieur à 1 car sa partie réelle est égale à 1 et comme sa partie imaginaire diminue sans toutefois devenir nulle... Le module ne peut pas faire autrement que de tendre vers 1 par valeurs supérieures.

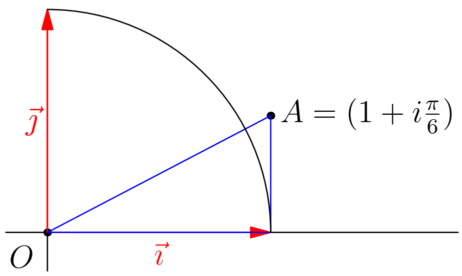

Figure 18 – Le module de $(1 + i\frac{\pi}{n})$ est supérieur à 1

On voit bien dans la figure 18 que si n augmente, le point A va se rapprocher de l'axe des x mais qu'il restera toujours à l'extérieur du cercle de rayon 1.

Quitte à être un peu lourd, répétons les choses : dans l'expression de e, l'intérieur de la parenthèse tend vers un nombre complexe dont l'argument est très, très petit (infiniment petit) et dont le module $(\sqrt{1^2 + (\frac{\pi}{n})^2})$ tend vers 1 par valeurs supérieures sans jamais l'atteindre.

Concernant l'argument, toujours de manière graphique, voilà ce que l'on peut observer sur la figure 19.

Cela veut tout simplement dire que l'argument (l'angle) de $(1 + i\frac{\pi}{n})$ est toujours inférieur à celui de $cos(\frac{\pi}{n}) + isin(\frac{\pi}{n})$. Cette différence est d'autant plus petite que l'argument tend vers 0. Cette constatation à propos de l'argument de $(1 + i\frac{\pi}{n})$ est importante car elle n'est pas sans conséquence. Elle signifie que même si on tourne n fois autour de O dans le processus d'élévation à la puissance n, le point A ne pourra jamais atteindre le point -1. En d'autres mots, si l'angle est inférieur à $\frac{\pi}{n}$, même si on le multiplie par n on arrivera jamais à égaler π.

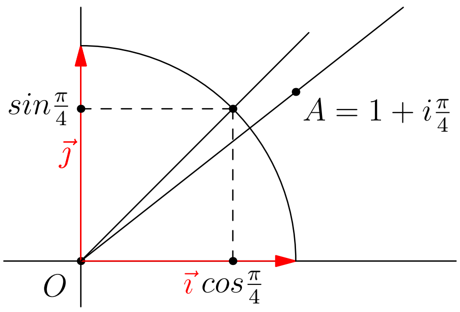

FIGURE 19 – L'argument de $(1+i\frac{\pi}{n})$ est inférieur à celui de $cos(\frac{\pi}{n})+isin(\frac{\pi}{n})$

Maintenant que l'on a tous ces élément en tête, regardons ce qui se passe dans la cas où $n = 6$

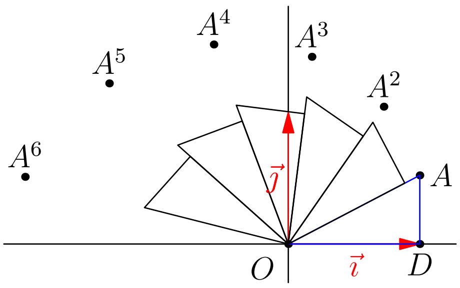

FIGURE 20 – Représentation graphique de $(1 + i\frac{\pi}{6})^6$

Il faut bien remarquer que dans le cas ci-dessus, on part de A dont l'argument est $\frac{\pi}{6}$ et on évalue sa sixième puissance. Autrement dit, autour de O, on tourne 6 fois vers la gauche (sens trigo) d'un angle qui n'est autre que l'argument de A (le nombre $1+\frac{\pi}{6}$ a un argument de 27.63°). Au final, A^6 est un point qui se trouve à 165.81°, assez loin finalement de π. Il n'y a pas de surprise c'est exactement ce que nous avions expliqué précédemment : avec un angle inférieur à $\frac{\pi}{n}$ même si on le multiplie par n on arrivera jamais à égaler π.

Si maintenant on prend $n = 20$ et si on allège un peu le graphique voilà ce que l'on observe.

Tous calculs fait, A^{20} possède un argument de 178.54° qui est beaucoup plus proche de l'angle π et donc de -1

On imagine facilement ce qui se passe quand n tend vers l'infini. L'argument de A tend vers 0 et son module se rapproche de plus en plus de 1. L'angle est, par valeurs inférieures, infiniment proche de $\frac{\pi}{n}$ et donc quand on multiplie cet angle par n lors de l'opération d'élévation à la puissance n, on se rapproche de plus en plus de -1.

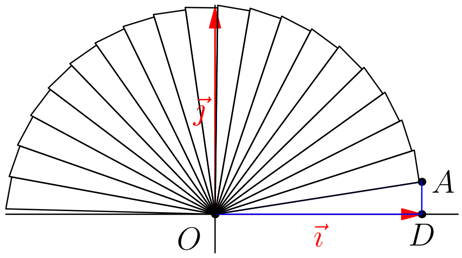

FIGURE 21 – Représentation graphique de $(1 + i\frac{\pi}{20})^{20}$

Bref on est capable de comprendre un peu mieux ce que signifie la formule d'Euler :

$$e^{i\pi} = -1$$

7 Résumé

On a vu dans un précédent article comment exprimer e sous forme de limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Ensuite on a déterminé notre objectif : trouver un moyen de représenter l'équation suivante

$$e^{i\pi} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + i\frac{\pi}{n}\right)^n$$

Pour cela on a commencé par décortiquer, dans le plan complexe, l'opération de multiplication et on a retenu les points suivants :

1. Multiplication d'un complexe par un réel = mise à l'échelle
2. Multiplication d'un complexe par un imaginaire pur = mise à l'échelle et rotation de $\pi/2$.
3. Le module de la multiplication c'est la multiplication des modules.
4. L'argument de la multiplication c'est la somme des arguments

Ayant mis en évidence des triangles semblables dans l'opération de multiplication on a ensuite établit une "recette" qui permet de multiplier graphiquement deux nombres complexes :

1. On place les points A et B à multiplier sur le plan
2. On place un point D en $(1, 0)$
3. On construit un triangle (O, D, A)

4. On fait subir une rotation à ce triangle afin d'amener OD sur OB
5. On dilate/compresse alors le triangle (O, D, A) de telle sorte que D vienne sur B
6. A se trouve alors au point qui représente la multiplication de A par B

Équipé de cet outil graphique on s'est attaqué aux calculs des puissances des nombres complexes et, entres autres, aux calculs des puissances des nombres complexes dont le module vaut 1.

Enfin nous avons appliqué toutes ses connaissances à l'élévation à la puissance n du nombre complexe $\left(1 + i\frac{\pi}{n}\right)^n$ et nous avons été capables de retrouver graphiquement la formule d'Euler.

$$e^{i\pi} = -1$$