Une définition de l'exponentielle (e)

Philippe BAUCOUR

19 décembre 2015

1 Introduction

Cet "article" est surtout un prétexte pour utiliser les logiciels LATEX et Asymptote. Je vais en profiter pour montrer comment on peut définir e à partir d'un problème de croissance de quantités.

Normalement si vous avez le niveau de la terminale il ne devrait pas y avoir de problème pour suivre les explications.

Dans ce qui suit, une fois le problème posé (équation (2.6)) je prends le temps d'expliquer la réflexion et la méthode qui conduisent à la résolution du problème posé. En effet, plutôt que de "jeter" une démonstration, bien propre mais un peu "magique" il me paraît important d'expliquer le comment. En fait, très souvent quand je lis une démonstration, je me demande "mais comment il a eu cette idée ?". Ce n'est jamais expliqué et j'ai toujours trouvé ça dommage. J'espère que ce ne sera pas le cas pour vous lorsque vous lirez les lignes qui suivent.

2 Posons le problème

Supposons qu'une certaine quantité (matière, liquide, bactéries, argent) double à chaque période de temps. Par exemple, la somme d'argent que je mets à la banque double tous les ans ou bien le nombre de bactéries dans une boîte de Petri double toutes les 4 heures.

Dans la suite, on notera T la période (un an, 4 heures) et au bout de n périodes, on notera Q_{nT} la quantité de matière que l'on aura à notre disposition.

Comment ça marche ? Prenons l'exemple de la banque. Au tout début, on fait un dépôt d'une quantité initiale Q_{0T} et on s'en va. On ne revient plus à la banque pendant un an. Au bout d'un an, on est à $t = 1T$, on revient et on demande à retirer de la banque "intérêts et principal". Le banquier sort du coffre la quantité d'argent Q_{0T}, il relit le contrat et réalise qu'il doit nous payer 100% d'intérêt. Il remet donc Q_{0T} € supplémentaires sur la table. On prend les $2Q_{0T}$ et on s'en va. On fait 3 pas dans le hall de la banque, et on réalise qu'en fait on a pas besoin de cet argent. On retourne voir notre banquier pour y laisser notre argent ($Q_{0T} + Q_{0T}$) de nouveau un an. Quand on revient, on est à $t = 2T$, on retire "intérêts et principal" etc. La situation est illustrée dans la figure ci-dessous.

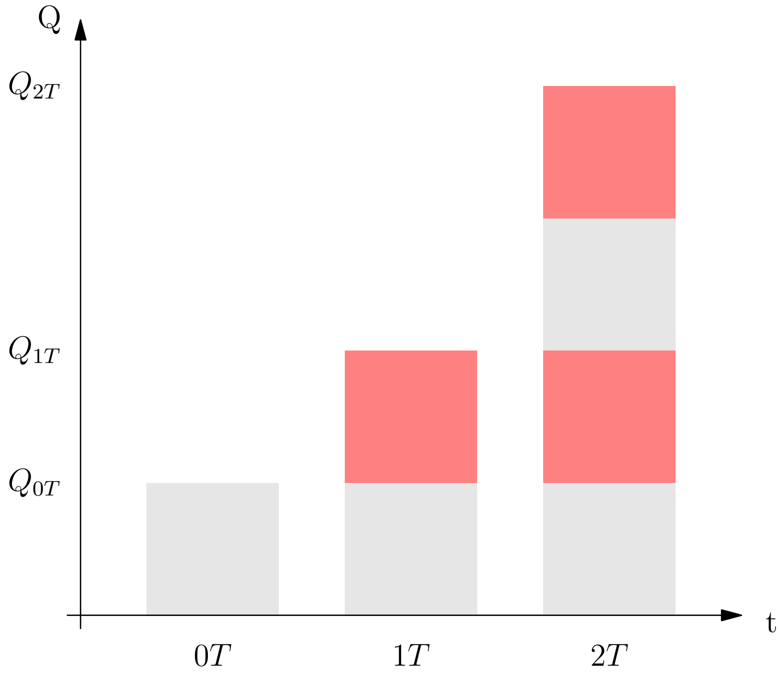

Figure 1 – Croissance de Q en fonction de t

Reprenons, mais ce coup on va décrire ce qui se passe à l'aide d'équations (on va faire une "mise en équations"). Au début on apporte Q_{0T} et ce qui est sûr, c'est qu'au bout d'une période T, la quantité que nous sommes susceptibles de récupérer c'est le double de la valeur initiale. On peut donc écrire :

$$Q_{1T} = Q_{0T} + Q_{0T} \tag{2.1}$$

Le premier terme Q_{0T} représente la quantité initiale alors que le second, représente le montant des intérêts. On peut prendre le temps de remarquer que tout se passe comme si en notre absence notre argent générait de l'argent et qu'après avoir mis 10 € dans une boite de conserve, au bout d'un an, on pouvait en retirer 20 € (magique !). Quoiqu'il en soit, en mettant Q_{0T} en facteur dans l'équation précédente on peut écrire :

$$Q_{1T} = Q_{0T}\,(1 + 1) \tag{2.2}$$

Maintenant si on regarde ce que l'on va récupérer au bout de la seconde période T, on peut décrire la situation avec l'équation suivante :

$$\begin{aligned} Q_{2T} &= Q_{1T} + Q_{1T} \\ &= Q_{1T}\,(1+1) \end{aligned}$$

Or :

$$Q_{1T} = Q_{0T}\,(1+1)$$

Donc :

$$Q_{2T} = Q_{0T}\,(1+1)\,(1+1)$$

Soit pour finir :

$$Q_{2T} = Q_{0T}\,(1+1)^2$$

Avec le même raisonnement on voit qu'au bout de n périodes, nous allons récupérer :

$$Q_{nT} = Q_{0T}\,(1+1)^n$$

Très bien. Maintenant la question que l'on peut se poser est de savoir ce qui se passe si on négocie avec notre banquier afin que les intérêts ne soient plus payés à chaque fin de période mais tous les 1/10 de période. Attention, il faut bien comprendre qu'on ne change pas le taux d'intérêt, on change juste le rythme auquel les intérêts sont payés. Typiquement on ne demande pas au banquier de nous payer 100% d'intérêt tous les 1/10 d'année, par contre on souhaite pouvoir toucher les intérêts tous les 1/10 d'année et les laisser à la banque afin qu'ils contribuent, eux aussi, à la création de nouveaux intérêts. En s'inspirant de l'équation (2.1) on peut écrire :

$$Q_{0T+\frac{1}{10}T} = Q_{0T} + \frac{1}{10}Q_{0T} \tag{2.3}$$

La notation un peu bizarre du terme de gauche est là pour bien indiquer qu'on évalue la quantité de matière (ou d'argent) au bout d'un dixième de l'ancienne période. À droite, on retrouve notre principal (la somme que l'on a déposé initialement) et un dixième des intérêts que l'on aurait touché si on avait attendu T au lieu de $1/10T$. En mettant Q_{0T} en facteur, l'équation précédente devient :

$$Q_{0T+\frac{1}{10}T} = Q_{0T}\left(1 + \frac{1}{10}\right) \tag{2.4}$$

Regardons maintenant la quantité de matière que l'on aura au bout de 2/10 de T. En s'inspirant directement de ce que l'on a fait précédemment on peut écrire :

$$Q_{0T+\frac{2}{10}T} = \left(Q_{0T}\left(1+\frac{1}{10}\right)\right)\left(1+\frac{1}{10}\right)$$

En français, on va dire que dans l'équation précédente, la quantité de matière à 2/10 de T c'est la quantité de matière que l'on avait à 1/10 de T multipliée par $(1+\frac{1}{10})$. Or la quantité de matière que l'on avait à 1/10 de T c'était $Q_{0T}(1+\frac{1}{10})$. Ceci explique le contenu de la première parenthèse. La seconde parenthèse n'est autre que la parenthèse de l'équation (2.4). Bref, si on fait la mise en facteur on obtient :

$$Q_{0T+\frac{2}{10}T} = Q_{0T}\left(1+\frac{1}{10}\right)^2 \tag{2.5}$$

Note : Si l'écriture précédente n'est pas claire, on peut raisonner différemment et dire que la quantité de matière au bout de 2/10 de période, c'est la quantité de matière initiale Q_{0T} plus 1/10 de cette dernière ($\frac{1}{10}Q_{0T}$). Ça, c'est la quantité de matière au bout de 1/10 (voir l'équation (2.3)). Ceci étant posé, chacune de ces 2 quantités va être à son tour augmentée de 1/10 pendant la seconde période. Cela amène les 2 derniers termes de l'équation ci-dessous, à savoir 1/10 de Q_{0T} et 1/10 de $\frac{1}{10}Q_{0T}$:

$$Q_{0T+\frac{2}{10}T} = Q_{0T} + \frac{1}{10}Q_{0T} + \frac{1}{10}Q_{0T} + \frac{1}{10}\frac{1}{10}Q_{0T}$$

Cela se simplifie sous la forme :

$$Q_{0T+\frac{2}{10}T} = Q_{0T} + \frac{2}{10}Q_{0T} + \frac{1}{10}\frac{1}{10}Q_{0T}$$

Comme on est des "pros", on a le réflexe de mettre en facteur tout ce qui peut l'être :

$$Q_{0T+\frac{2}{10}T} = Q_{0T}\left(1+\frac{2}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)^2\right)$$

Si maintenant on se rappelle le bon vieux temps de la maternelle et le fait que $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ l'équation précédente se simplifie encore et on retrouve l'équation (2.5) :

$$Q_{0T+\frac{2}{10}T} = Q_{0T}\left(1+\frac{1}{10}\right)^2$$

A ce stade, il ne faut pas être devin pour déterminer la quantité de matière que l'on aura au bout de 3/10 de T :

$$Q_{0T+\frac{3}{10}T} = Q_{0T}\left(1+\frac{1}{10}\right)^3$$

Enfin, dans le cas où les intérêts sont payés tous les 1/10 de période on peut déterminer la quantité d'argent que l'on aura au bout d'une période T complète en évaluant ce que l'on va pouvoir toucher au bout de dix dixième de T :

$$Q_{1T} = Q_{0T}\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}$$

Ce résultat est à comparer avec l'équation (2.2) afin de déterminer ce qui est le plus avantageux pour nous (si on est prêts à laisser son argent un an à la banque, faut-il voir les intérêts être payés à la fin de l'année ou tous les 1/10 d'année et de laisser à la banque le montant des intérêts ?).

Un raisonnement identique nous permettrait d'évaluer la somme reçue au bout d'une période T si le banquier payait les intérêts tous les 1/100 de période :

$$Q_{1T} = Q_{0T}\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}$$

Enfin, on peut se demander qu'elle est la quantité d'argent ou de matière que l'on va récupérer au bout d'une période T si les intérêts sont payés tous les 1/n de période et si on fait tendre n vers l'infini :

$$Q_{1T} = Q_{0T}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Afin de comparer cette expression de Q_{1T} avec celle de l'équation (2.2) ($Q_{1T} = Q_{0T}(1+1)$) on est amené à évaluer la quantité qui multiplie Q_{0T}. Il faut surtout étudier le comportement de cette quantité quand n tend vers l'infini. Bref, il faut étudier :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \tag{2.6}$$

Il faudra voir si cette quantité est inférieure, supérieure ou égale à 2. En effet, il ne faut pas oublier que dans l'équation (2.2), Q_{0T} est en facteur de $1+1=2$. On pourra dire alors si il est préférable (ou pas) de faire en sorte qu'à chaque instant chaque quantité de matière générée, génère à son tour de la matière.

3 Résolution du problème

On cherche à évaluer :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

A priori c'est pas immédiat cette évaluation de limite... Pour le 1/n dans la parenthèse c'est facile, ça va tendre vers 0 quand n va tendre vers l'infini.

Mais bon, y a cette puissance de n qui complique tout. Une méthode qui ne marche pas trop mal quand on est coincé avec une histoire de limites, c'est le théorème des gendarmes. En gros, on encadre la fonction dont on cherche la limite par 2 autres fonctions. Les valeurs des deux fonctions doivent être respectivement supérieures et inférieures à celles de la fonction dont on cherche la limite. De plus, il faut s'arranger pour choisir deux fonctions qui ont la même limite l. La fonction étant "coincée" entre deux fonctions qui tendent vers une limite l, on en conclura que la limite de la fonction c'est l. C'est ce qui est illustré sur la Figure 2 ci-dessous.

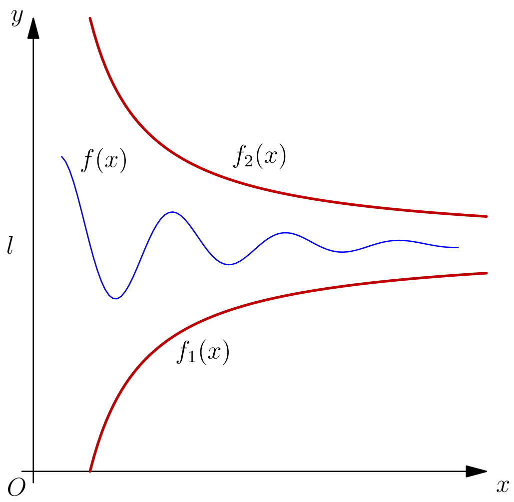

Figure 2 – Les gendarmes en action

Plus facile à dire qu'à faire cette histoire... Ce qui impressionne les foules, ce qui pose problème ici c'est le $(1 + \frac{1}{n})^n$. Partons de la fin, de ce que l'on souhaite pour que le théorème des gendarmes puisse fonctionner. Autrement dit, encadrons cette fonction avec deux fonctions à déterminer : $f_1(x)$ et $f_2(x)$. Il vient :

$$f_1(x) < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < f_2(x)$$

Il y a une puissance de x que l'on souhaite faire disparaître. Prenons le $ln()$ de tout ça :

$$ln(f_1(x)) < ln\left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right) < ln(f_2(x))$$

On fait "descendre" la puissance de x devant le ln :

$$ln(f_1(x)) < xln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < ln(f_2(x))$$

On divise tout par x :

$$\frac{1}{x}ln(f_1(x)) < ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}ln(f_2(x))$$

Oui, oui, je sais, pour faire tout ça il faut que x soit non nul. Ceci dit, c'est déjà le cas car on encadre une expression qui contient déjà un terme en 1/x.

Oui, oui, je sais, pour faire tout ça il faut aussi que x soit positif (car on divise par x sans changer le sens des inégalités). C'est aussi déjà le cas car si on se rappelle bien que x représente "physiquement" une fraction de la période T. Cet intervalle de temps est "normalement" positif.

Mouai... Et maintenant, qu'est-ce qu'on fait ? Y a ce $ln()$ au milieu... Revenons à la définition de $ln(x)$:

$$ln(x) = \int_1^x \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$ln(x) = ln(x) - ln(1)$$

En utilisant le fait que $ln(1)$ vaut 0, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} ln\left(1+\frac{1}{x}\right) &= ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - ln(1) \\ ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - ln(1) &= \int_1^{1+\frac{1}{x}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ ln\left(1+\frac{1}{x}\right) &= \int_1^{1+\frac{1}{x}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Et ça, c'est une sacrée bonne nouvelle. Cela veut dire que l'on a transformé notre problème de comparaison de $ln()$ en un problème de comparaison de surface. Si on récapitule. Comme $ln(1+\frac{1}{x})$ est en fait l'intégrale de $1/x$ entre 1 et $1+\frac{1}{x}$, on cherche donc maintenant à encadrer $ln(1+\frac{1}{x})$ par deux intégrales (deux aires) entre les abscisses 1 et $1+1/x$.

Avec ce que l'on vient de dire, on peut écrire l'encadrement précédent sous la forme :

$$\int_1^{1+\frac{1}{x}} f_1(x)\,\mathrm{d}x < \int_1^{1+\frac{1}{x}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x < \int_1^{1+\frac{1}{x}} f_2(x)\,\mathrm{d}x \tag{3.1}$$

Faisons un dessin (faut toujours faire des dessins !). On trace la fonction $\frac{1}{x}$ puisque c'est elle que l'on doit intégrer. On fait aussi apparaître les abscisses et les ordonnées de 1 et de $1+\frac{1}{x}$ qui sont les bornes d'intégration. Bien voir qu'en gris et en hachuré on fait ressortir deux aires particulières.

On remarque que l'aire sous la courbe $f(x) = \frac{1}{x}$ entre 1 et $1+\frac{1}{x}$ est plus grande que l'aire du rectangle $[1; 1+\frac{1}{x}] * [0; \frac{1}{1+\frac{1}{x}}]$ (rectangle hachuré)

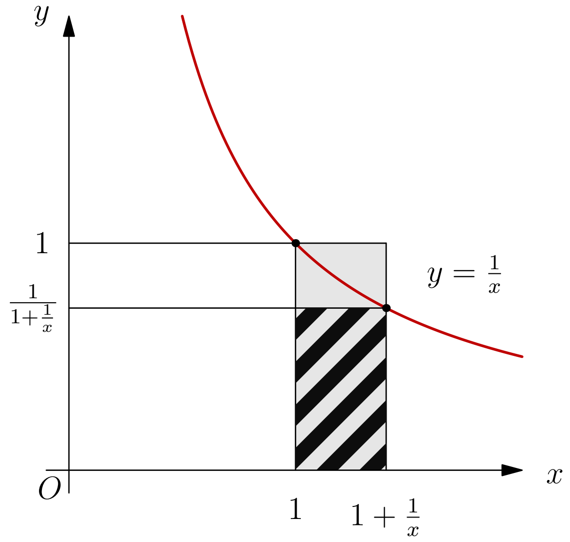

FIGURE 3 – Encadrement de $\int_1^{1+\frac{1}{x}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

mais plus petite que l'aire du rectangle $[0;1] * [1, 1 + \frac{1}{x}]$ (rectangle gris qui à partir de l'ordonnée 1 descend jusqu'à l'axe des abscisses, sous le rectangle hachuré).

Utilisons cette constatation et reprenons notre encadrement là où nous l'avions laissé dans l'équation(3.1) :

$$\int_1^{1+\frac{1}{x}} f_1(x)\,\mathrm{d}x < \int_1^{1+\frac{1}{x}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x < \int_1^{1+\frac{1}{x}} f_2(x)\,\mathrm{d}x$$

A gauche et à droite on remplace les intégrales par les surfaces des rectangles hachurés et gris :

$$\left(1 + \frac{1}{x} - 1\right) * \left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}} - 0\right) < \int_1^{1+\frac{1}{x}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x < \left(1 + \frac{1}{x} - 1\right) * (1 - 0)$$

Juste pour être sûr... La surface d'un rectangle c'est *Base* $*$ *Hauteur*. A gauche c'est l'expression de la surface du rectangle hachuré. La première parenthèse correspond à la *Base* du rectangle hachuré. Cette dernière, c'est la distance entre les abscisses 1 et $(1 + \frac{1}{x})$ et c'est bien pour cela qu'on fait la différence entre $(1 + \frac{1}{x})$ et 1. Toujours à gauche, la seconde parenthèse c'est la *Hauteur* du rectangle hachuré. C'est la distance entre les ordonnées $\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ et 0. A droite... Hé bien à droite je vous laisse jeter votre oeil sur la Figure précédente et retrouver vos petits. Quoiqu'il en soit, après nettoyage il vient :

$$\frac{1}{x} * \frac{1}{1+\frac{1}{x}} < ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

On multiplie tout par x :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}} < x * ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < 1$$

Au milieu, on fait "remonter" le x sous forme de puissance :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}} < ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < 1$$

Maintenant, on étudie les limites de gauche et de droite quand x tend vers l'∞ :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} < ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < 1$$

Quand x tend vers l'∞, $\frac{1}{x}$ tend vers 0 et le dénominateur de gauche tend vers 1 ce qui permet d'écrire :

$$\lim_{x\to+\infty} 1 < ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < 1$$

Autrement dit :

$$\lim_{x\to+\infty} ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = 1$$

En prenant l'exponentielle de l'équation précédente on arrive à la conclusion suivante :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e}$$

4 Conclusion

En Français dans le texte cela veut dire : alors qu'une quantité de matière ou d'argent double à chaque période, si on s'arrange pour qu'à chaque instant, la quantité de matière générée engendre à son tour de la matière, nous obtiendrons au maximum, au bout de la même période T, non pas deux fois la quantité initiale mais e fois la quantité initiale. C'est ce que l'on appelle la loi des intérêts composés.